FINANZA AZIENDALE

a.a. 19/20

STUDENTI ALLA TERZA

ANDREA DEL GROSSO

CAPITOLO 11 ''La scelta del portafoglio ottimale e il CAPM''

Possiamo definire un portafoglio tramite i pesi del portafoglio, cioè le quote dell'investimento totale corrispondenti a ogni singolo investimento compreso nel portafoglio:

$$x_i = \frac{\text{valore dell'investimento } i}{\text{valore totale del portafoglio}} \quad (11.1)$$

Se si sommano questi pesi si giunge all'unità, perciò i pesi rappresentano il modo in cui è suddiviso tra i singoli investimenti i denaro investito nel portafoglio. Dati i pesi (x1,…xn) possiamo trovare facilmente il rendimento del portafoglio. Supponiamo che gli n investimenti abbiamo rendimenti rappresentabili come R1,…Rn allora il rendimento del portafoglio Rp è la media ponderata dei rendimenti dei singoli investimenti del portafoglio:

$$R_P = x_1R_1 + x_2R_2 + \cdots + x_nR_n = \sum_i x_iR_i \quad (11.2)$$

Il rendimento di un portafoglio lo possiamo calcolare con la formula 11.2 (**calcolo dei rendimenti storici**), oppure calcolando il nuovo valore e poi misurare il rendimento aggiuntivo

Quando i P dei titoli all'interno di un portafoglio cambiano, anche i pesi di questi titoli cambiano.

L'equazione 11.2 permette anche di calcolare il rendimento atteso di un portafoglio:

$$E[R_P] = E\left[\sum_i x_iR_i\right] = \sum_i E[x_iR_i] = \sum_i x_iE[R_i] \quad (11.3)$$

Ovvero il rendimento atteso di un portafoglio è semplicemente la media dei rendimenti attesi degli investimenti ceh lo compongono, ponderata ai relativi pesi nel portafoglio.

La volatilità di un portafoglio composto da due azioni

Consideriamo tre azioni che hanno la stessa volatilità e lo stesso rendimento medio, ma la struttura dei loro rendimenti differisce, ovvero cambia il modo in cui i titoli si muovono da un anno all'altro in funzione di quelli che sono i rischi che si manifestano da un anno all'altro.

(Tabella 11.1 psg.382)

Dalla tabella osserviamo che il rendimento medio di entrambi i portafogli è pari alla media dei rendimenti delle singole azioni, tuttavia le volatilità differiscono da quelle delle singole azioni e anche tra di loro. In primo luogo, combinando le azioni in un portafoglio, si riduce il rischio grazie alla diversificazione. In secondo luogo, l'entità del rischio eliminato in un portafoglio dipende dal grado in cui le azioni fanno fronte ai rischi comuni e al modo in cui i loro prezzi si muovono insieme, posso ridurre la Q di rischio comune che è legato al modo in cui i singoli titoli lo fronteggiano, più i loro movimenti sono concordi meno rischio riuscirò a ridurre e viceversa.

La volatilità di un portafoglio dipende quindi sia dalla volatilità dei titoli stessi che dalla loro **Covarianza,** la quale misura quanto due titoli si muovono nella stessa direzione, ed è il prodotto atteso delgi scarti di due rendimenti dalle loro medie. L a covarianza tra i rendimenti Ri e Rj è:

$$Cov(R_i,R_j) = E\left[(R_i - E[R_i])(R_j - E[R_j])\right] \quad (11.4)$$

Quando invece si stima la covarianza partendo da dati storici, si utilizza la formula:

$$Cov(R_i,R_j) = \frac{1}{T-1}\sum_t (R_{i,t} - \bar{R}_i)(R_{j,t} - \bar{R}_j) \quad (11.5)$$

La covarianza sarà positiva con movimenti concordi, tendente a 0 se i due titoli sono indipendenti, negativa se i movimenti tendono ad essere discordi, non ha però ne un valore MAX ne MIN. La cov quindi è di difficile interpretazione in quanto ha la stessa unità di misura della varianza ed inoltre sarà elevata sia nel caso in cui le azioni abbiano un'elevata volatilità ma anche quando le azioni avranno movimento concordi. Per poter quantificare l'intensità del commovimento dei titoli in relazione al rischio comune utilizziamo un'altra grandezza la **Correlazione,** definita come la cov dei rendimenti divisa per il prodotto delle deviazioni standard di ciascun rendimento:

$$Corr(R_i, R_j) = \frac{Cov(R_i, R_j)}{SD(R_i)\, SD(R_j)} \quad (11.6)$$

La correlazione tra due azioni ha lo stesso segno della loro covarianza, assume però sempre valori compresi tra +1 e -1, e ciò permette di misurare la forza delle relazioni tra le azioni. Più la correlazione assume un valore prossimo a +1, più i rendimenti tenderanno a muoversi insieme rispetto ai rischi comuni, quando la correlazione è pari a 0 i rendimenti non sono correlati, infine più la correlazione è vicina a -1 più i rendimenti tendono a muoversi in maniera opposta.

! <u>La covarianza tra i rendimenti di un'azione e se stessi è la varianza, mentre la correlazione tra i rendimenti di un'azione e sé stessa è pari a 1.</u> !

Le azioni dello stesso settore tendono ad avere rendimenti maggiormente correlati rispetto ad azioni appartenenti a settori diversi.

Dall'equazione 11.6 risolvendo per la covarianza otteniamo una nuovo formula per il calcolo della covarianza:

$$Cov(R_M,\ R_{HP}) = Corr(R_M,\ R_{HP})\ SD(R_M)\ SD(R_{HP})$$

<u>Calcolo della volatilità e della varianza del portafoglio</u>

Per un portafoglio formato da due azioni con Rp= x1R1 + x2R2:

$$\begin{aligned} Var(R_P) &= Cov(R_P,\ R_P) \\ &= Cov(x_1R_1 + x_2R_2,\ x_1R_1 + x_2R_2) \\ &= x_1x_1Cov(R_1,\ R_1) + x_1x_2Cov(R_1,\ R_2) + x_2x_1Cov(R_2,\ R_1) + x_2x_2Cov(R_2,\ R_2) \end{aligned}$$

Arriviamo così al principale risultato di questo paragrafo:

$$Var(R_P) = x_1^2 Var(R_1) + x_2^2 Var(R_2) + 2x_1x_2 Cov(R_1, R_2) \quad (11.8)$$

E la volatilità è data dalla radice quadrata di questa formula. Possiamo anche riscrivere l'equazione 11.8 utilizzando le volatilità delle azioni e calcolando la covarianza derivante dalla correlazione:

$$(11.9) \quad Var(R_P) = x_1^2 SD(R_1)^2 + x_2^2 SD(R_2)^2 + 2x_1x_2 Corr(R_1, R_2)\, SD(R_1)\, SD(R_2)$$

<u>La volatilità di un portafoglio composto da molte azioni</u>

Possiamo ottenere ulteriori vantaggi dalla diversificazione detenendo più di due azioni nel portafoglio. Utilizzando le proprietà della covarianza, possiamo scrivere la varianza del portafoglio come segue:

$$Var(R_P) = Cov(R_P, R_P) = Cov(\Sigma_i x_i R_i, R_P) = \sum_i x_i Cov(R_i, R_P) \quad (11.10)$$

Questa equazione indica che la varianza di un portafoglio equivale alla covarianza media ponderata di ogni azione con il portafoglio. Il rischio del portafoglio, quindi, dipende dal modo in cui ogni singolo rendimento azionario si muove in relazione al portafoglio stesso. Possiamo semplificare ulteriormente la formula sostituendo il secondo Rp con la media ponderata dei rendimenti:

$$\begin{aligned} Var(R_P) &= \sum_i x_i Cov(R_i, R_P) = \sum_i x_i Cov\left(R_i, \Sigma_j x_j R_j\right) \\ &= \sum_i \sum_j x_i x_j Cov\left(R_i, R_j\right) \end{aligned} \quad (11.11)$$

Questa formula indica quindi che la varianza di un portafoglio è pari alla somma delle covarianze dei rendimenti di tutte le coppie di azioni nel portafoglio, ciascuna moltiplicata per i rispettivi pesi nel portafoglio, perciò la varianza dipende da come le azioni covariano tra di loro.

! quando abbaiamo molti titoli e dobbiamo utilizzare l’eq. 11.11, possiamo utilizzare la **matrice varianze covarianze** (è sul foglio 2) !

Si può utilizzare l’equazione 11.11 per calcolare la varianza di un **portafoglio uniformemente pesato** composto da n titoli, il cui peso di ogni titolo è xi = 1/n. Avremo in questo caso la seguente relazione:

(la dim. è sul foglio 3)

$$\begin{aligned} Var(R_P) &= \frac{1}{n}(\text{varianza media delle singole azioni}) \\ &+ \left(1 - \frac{1}{n}\right)(\text{covarianza media tra le azioni}) \end{aligned} \quad (11.12)$$

questa equazione mostra che all’aumentare del numero di azioni n, la varianza del portafoglio viene principalmente determinata dalla covarianza media, in quanto il primo addendo si elimina. La volatilità diminuisce all’aumentare del numero delle azioni, diminuisce più velocemente all’inizio e più lentamente all’aumentare dei titoli, il rischio può essere completamente diversificato solamente nei casi teorici in cui i titoli siano indipendenti, oppure quando due titoli tendono a muoversi in maniera discorde e quindi si compensano corr < 0, in quanto entrambe gli addendi sarebbero uguali a 0.

Per un **portafoglio con pesi a scelta**, si può riscrivere l’eq.11.10 in termini di correlazione come segue:

$$Var(R_P) = \sum_i x_i Cov(R_i, R_P) = \sum_i x_i SD(R_i) SD(R_P) Corr(R_i, R_P)$$

dividendo entrambi i membri di questa equazione per la deviazione standard del portafoglio, otteniamo la formula della **volatilità di un portafoglio con pesi a scelta:**

$$SD(R_P) = \Sigma_i \overbrace{\underbrace{x_i}_{\text{peso di } i} \times \underbrace{SD(R_i)}_{\text{rischio totale di } i} \times \underbrace{Corr(R_i, R_P)}_{\text{frazione del rischio di } i \text{ che è comune a } P}}^{\text{contributo del titolo } i \text{ alla volatilità del portafoglio}}$$

da questa equazione si deduce che ogni titolo contribuisce alla volatilità del portafoglio in base alla propria volatilità ponderata alla correlazione del titolo con il portafoglio, che è la frazione del rischio totale comune al portafoglio. Quindi quando si combinano azioni all’interno di un portafoglio con pesi positivi, a meno che tutte le azioni mostrino una perfetta correlazione positiva +1 con il portafoglio, il rischio del portafoglio sarà più basso rispetto alla media ponderata delle volatilità delle singole azioni.

Rischio e rendimento: la scelta di un portafoglio efficiente

Dopo aver compreso come calcolare il rendimento atteso e la volatilità di un portafoglio, si può tornare all'obbiettivo principale del capitolo: determinare come un investitore può creare un portafoglio efficiente. Partiamo cercando un portafoglio efficiente composto da solo due azioni. Per la scelta tra due portafogli l'investitore utilizzerà il **Criterio media varianza** (tra due portafogli con lo stesso rischio dobbiamo scegliere quello con il rendimento più alto, tra due portafogli con lo stesso rendimento dobbiamo scegliere quello con il rischio più basso). Consideriamo un portafoglio composto da Intel e Coca Cola che presentano questi rendimenti e volatilità:

Titolo Intel→ E(Ri) = 26% SD= 50%
Titolo Coca Cola → E(Ri) = 6% SD = 25%

Possiamo creare n portafogli a seconda dei pesi che vogliamo dare nel portafoglio ai due titoli. Rappresentiamo la **Frontiera delle opportunità** ovvero quell'iperbole costituita da tutte le combinazioni possibili dei due titoli.

(Figura 11.3 pag.394)

La parte grigia dell'iperbole viene detta **Frontiera efficiente**, è composta da tutti i titoli efficienti la scelta tra questi dipenderà solamente dall'avversione al rischio degli investitori. Un portafoglio è un **portafoglio non efficiente** quando è possibile trovarne un altro migliore, sia in termini di rendimento atteso che di volatilità, nella figura precedente investire solamente in azioni Coca Cola è inefficiente, e lo stesso vale per tutti i portafogli con più dell'80% di azioni investite in Coca Cola. I portafogli non efficienti non sono ottimali per un investitore in cerca di alti rendimenti e bassa volatilità. Il portafoglio (0,2-0,8) è il portafoglio con volatilità più bassa possibile, è detto infatti **Portafoglio a varianza minima** o **portafoglio di svolta,** divide la parte efficiente da quella inefficiente della frontiera delle opportunità. Per calcolarlo dobbiamo minimizzare la funzione della varianza calcolando ed uguagliando a zero la derivata prima di tale funzione rispetto alla quota investita in uno dei due titoli. (*dimostrazione da sapere sulle slide*). Il portafoglio (0,4-0,6) si dice che domini il portafoglio (0-1) in quanto a parità di rischiosità ha un rendimento maggiore. I portafogli con almeno il 20% investito in azioni Intel sono efficienti in quanto non c'è nessun altro portafoglio dei due titoli che offra un più alto rendimento atteso con una minore volatilità. Gli investitori sceglieranno in base alle loro preferenze di rischio rendimento.

La correlazione non ha alcun effetto sul rendimento atteso di un portafoglio, la volatilità però varierà a seconda della correlazione, minore è la correlazione minore è la rischiosità e quindi minore sarà la Q di titolo meno rischioso che devo detenere. Osserviamo come varia la frontiera delle opportunità al variare della correlazione:

(Figura 11.4 pag.396)

Al diminuire della correlazione tra i due titoli la curva si piega fortemente verso sinistra. Quando le azioni sono perfettamente correlate positivamente, il set dei portafogli è rappresentato dal tratto di retta che unisce i due titoli in questo caso la volatilità del portafoglio è pari alla volatilità media ponderata delle due azioni non c'è diversificazione e quindi anche la scelta di investire solamente in Coca Cola diventa efficiente. Quando la correlazione è minore di 1 la volatilità si riduce e la curva si piega verso sinistra. All'altro estremo di perfetta correlazione negativa la linea è anche qui retta ma parte dall'asse verticale, quando due azioni sono perfettamente correlate negativamente, è possibile detenere un portafoglio con rischio nullo questo però è un caso teorico.

Finora abbiamo considerato solo portafogli in cui erano investite somme positive in ogni azione, quando si effettua un investimento positivo in un titolo si dice di assumere una **posizione lunga**. È possibile investire anche somme negative in un'azione cioè assumere una **posizione corta**, tramite l'utilizzo di una vendita allo scoperto ciò mi permette di investire più della mia ricchezza iniziale. Rappresentiamo la frontiera efficiente nel caso in cui ci sia la possibilità di vendite allo scoperto:

(Figura 11.5 pag.398)

È possibile includere una posizione corta in un portafoglio assegnando al titolo un peso negativo, la vendita allo scoperto rappresenta una strategia vantaggiosa se ci si aspetta che il P dell'azione diminuisca in futuro, se io potessi investire solamente in posizioni lunghe io guadagnerei solamente quando il mercato sale, ma anche nel caso in cui il P aumenti purché si investa il ricavato in un altro titolo con rendimento atteso ancora maggiore. La vendita allo scoperto può aumentare notevolmente il rischio del portafoglio. Vendendo allo scoperto Intel per acquistare Coca Cola si ottiene un risultato non efficiente, mentre nel caso opposto aggiungeremmo alla frontiera efficiente ulteriori portafogli efficienti, questi presenteranno una maggiore volatilità ma anche un maggior rendimento atteso, perciò può risultare attraente per un investitore aggressivo.
Quando si passa da due a tre titoli la diversificazione migliora e di conseguenza migliora anche la frontiera efficiente, che si sposta verso sinistra. Anche se i titoli aggiunti presentano combinazioni rischio-rendimento inferiori la frontiera migliora perché permettono una diversificazione aggiuntiva. Quindi per ottenere il set di combinazioni rischio-rendimento migliore possibile bisogna aggiungere titoli fino a quando non sono considerate tutte le opportunità d'investimento.

Prendere e dare denaro a prestito al tasso risk-free

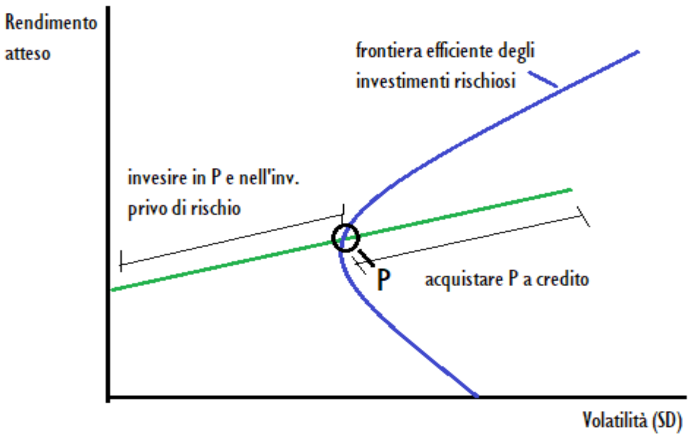
Esiste un altro modo oltre alla diversificazione per ridurre il rischio: investire una parte del nostro denaro in un investimento sicuro e privo di rischio, come per esempio i Buoni del Tesoro (ha un rendimento positivo e non ha volatilità né correlazione o covarianza con nessun alto titolo, il rendimento remunera solamente il trascorrere del tempo, non remunera il rischio sistematico perché non è soggetto al rischio sistematico). Consideriamo un certo portafoglio rischioso con rendimento **Rp,** destiniamo una parte x di una somma ad esso e il restante (1-x), in Buoni del Tesoro con un tasso di rendimento **Rf**. Calcoliamo il rendimento atteso **Rxp** e la varianza di questo portafoglio, il rendimento atteso Rxp è:

$$\begin{aligned} E[R_{xP}] &= (1-x)\,r_f + xE[R_P] \\ &= r_f + x\big(E[R_P] - r_f\big) \end{aligned} \qquad (11.15)$$

La prima relazione indica che il rendimento atteso è la media ponderata dei rendimenti attesi dei Buoni del Tesoro (che conosciamo e non dobbiamo calcolare il rend.atteso) e del portafoglio. La seconda relazione ci dice che il nostro rendimento atteso è pari al tasso privo di rischio più una quota del premio per il rischio del portafoglio, in funzione della frazione x investita in esso. Calcoliamo ora la volatilità, considerando che la SD è pari a zero come anche la covarianza tra portafoglio e investimento privo di rischio per cui:

$$\begin{aligned} SD(R_{xP}) &= \sqrt{(1-x)^2\,Var(r_f) + x^2 Var(R_P) + 2(1-x)\,x\,Cov(r_f, R_P)} \\ &= \sqrt{x^2 Var(R_P)} \\ &= xSD(R_P) \end{aligned} \qquad (11.16)$$

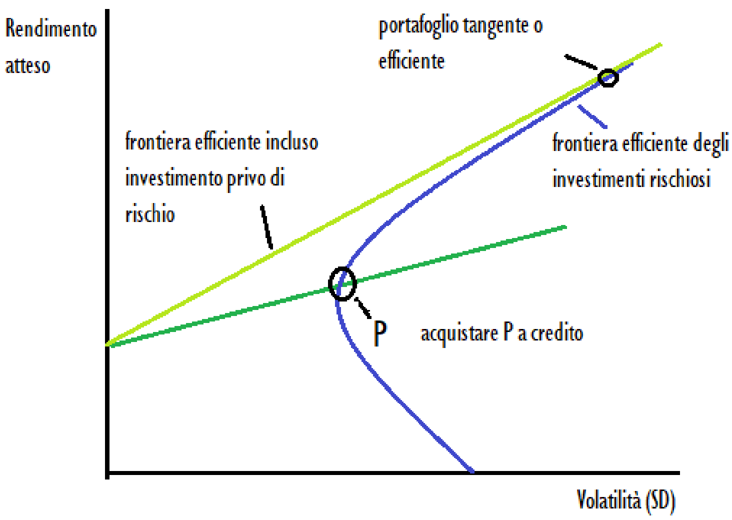
Cioè la volatilità è solo una parte della volatilità del portafoglio, che dipende dall'ammontare in esso investito.
Rappresentiamo ora le combinazioni di volatilità e rendimento atteso per scelte diverse di x:



Aumentando la quota x investita in P, aumenta anche il rischio e il corrispondente premio in proporzione secondo una relazione lineare, la linea che unisce l'investimento privo di rischio a P è una retta perché sia la varianza che la correlazione sono pari a 0. Se si aumenta x fino a superare la soglia del 100% si raggiungeranno punti oltre P sul grafico, in questo caso si vende allo scoperto l'investimento privo di rischio, per cui non riceveremo il rendimento privo di rischio e quindi è come se lo pagassimo, in altre parole è come prendere a prestito denaro al tasso privo di rischio. Prendere a prestito denaro per investire in azioni è detto **acquistare azioni in leva** o **a margine** (on margin), un portafoglio composto da una posizione corta su un investimento privo di rischio è detto anche **levered.** Dalla figura notiamo che P non è il miglior portafoglio da combinare con l'investimento privo di rischio, formando un portafoglio con l'attività priva di rischio e un portafoglio sulla frontiera efficiente più in alto del portafoglio P otteniamo una retta che è più inclinata rispetto a quella che passa per P. Se è più inclinata allora per ogni livello di volatilità otterremo un rendimento atteso più elevato. Per ottenere il rendimento atteso più alto possibile per qualunque livello di volatilità occorre trovare un portafoglio che generi la retta più inclinata possibile quando è combinato con l'investimento privo di rischio. La pendenza della retta che passa per un portafoglio P dato viene detta **Indice di Sharpe:**

$$\text{indice di Sharpe} = \frac{\text{rendimento in eccesso del portafoglio}}{\text{volatilità del portafoglio}} = \frac{E[R_P]-r_f}{SD(R_P)} \tag{11.17}$$

L'indice di Sharpe misura il rapporto premio volatilità fornito da un portafoglio, ovvero il premio per il portafoglio per ogni unità di volatilità. Il portafoglio ottimo da combinare con l'attività priva di rischio sarà quello con l'indice di Sharpe più alto, cioè quello per il quale la semiretta che parte dall'investimento privo di rischio è tangente alla frontiera tangente degli investimenti rischiosi:



Il portafoglio che genera questa tangente è noto come **portafoglio efficiente**, dato che possiede il più alto indice di Sharpe esso fornisce il più elevato rendimento per unità di volatilità rispetto a qualunque portafoglio disponibile. (*calcolo pendenza retta tangente dimostrazione p.404*). Le combinazioni dell'attività priva di rischio e del portafoglio tangente forniscono il miglior trade-off rischio-rendimento disponibile per un investitore. Ciò porta a una conseguenza importante: il portafoglio tangente è efficiente e che, una volta incluso l'investimento privo di rischio, tutti i portafogli efficienti sono combinazioni dell'investimento privo di rischio e del portafoglio tangente e nessun altro portafoglio composto da sole attività rischiose è efficiente. Perciò, ogni investitore dovrà investire nel portafoglio tangente indipendentemente dalla sua propensione al rischio, le sue preferenze determineranno solo quanto investire nel portafoglio tangente rispetto all'investimento privo di rischio.
In conclusione, il portafoglio efficiente è il portafoglio tangente, il portafoglio con l'indice di Sharpe più alto sul mercato finanziario. Combinandolo con l'investimento privo di rischio, un investitore otterrà il rendimento atteso più alto possibile per qualunque livello di volatilità sia disposto a sostenere.

Portafoglio efficiente e rendimenti richiesti

Ricaviamo una condizione per determinare se è possibile migliorare un portafoglio aggiungendo più azioni di un dato titolo e la utilizziamo per calcolare il rendimento richiesto da un investitore per mantenere l'investimento.

Prendiamo un qualunque portafoglio P e verifichiamo se sia possibile aumentare il suo indice di Sharpe vendendo alcuni titoli privi di rischio (o prendendo denaro a prestito) e investendo il ricavato in un investimento *i*. Ci sono due conseguenze:
1- Il rendimento atteso aumenterà del rendimento in eccesso di *i* $E[R_i] - r_f$.
2- Aggiungeremo il rischio che *i* ha in comune con il nostro portafoglio (il resto del rischio di *i* sarà diversificato)
Il maggior rendimento è sufficiente per compensare l'incremento del rischio?

Un altro modo per aumentare il rischio sarebbe stato quello di aumentare l'investimento nel portafoglio P. In tal caso l'indice di Sharpe ci direbbe quanto sarebbe aumentato il rendimento per un dato aumento di rischio. Poiché l'investimento in i aumenta il rischio di SD x Corr, offre un rendimento maggiore di quello che si sarebbe ottenuto dal solo P se:

$$\underbrace{E[R_i]-r_f}_{\text{rendimento aggiuntivo dovuto all'investimento } i} > \overbrace{\underbrace{SD(R_i)\times Corr(R_i,R_P)}_{\text{incremento di volatilità dovuto all'investimento } i} \times \underbrace{\frac{E[R_P]-r_f}{SD(R_P)}}_{\text{rendimento per unità di volatilità del portafoglio } P}}^{\text{rendimento aggiuntivo per assumere lo stesso rischio investendo in } P} \quad (11.18)$$

L'equazione 11.18 può essere riscritta per definire il beta dell'investimento i con il portafoglio P:

$$\beta_i^P \equiv \frac{SD(R_i)\times Corr(R_i,R_P)}{SD(R_P)} = \frac{Cov(R_i,R_P)}{Var(R_P)} \quad (11.19)$$

Il beta misura la sensibilità dell'investimento i alle fluttuazioni del portafoglio P. Possiamo riscrivere l'equazione 11.18 come segue:

$$E[R_i] > r_f + b_i^P \times (E[R_P] - r_f)$$

Ovvero <u>l'aumento dell'investimento in i farà aumentare l'indice di Sharpe del portafoglio P se il suo rendimento atteso eccede il **rendimento richiesto** per il rischio che i aggiunge al portafoglio dato il portafoglio P</u>,(esempio di titolo sottovalutato, il quale tramite questa sottovalutazione danno un rend.atteso > rend.richiesto), definito come segue:

$$r_i \text{ º } r_f + b_i^P \times (E[R_P] - r_f) \quad (11.20)$$

Il rendimento richiesto è il rendimento atteso necessario a compensare il contributo al rischio del portafoglio dell'investimento i, è pari al tasso d'interesse privo di rischio più il premio per il rischio del portafoglio corrente P, moltiplicato per la sensibilità di i a P cioè per il beta. (*derivazione analitica sulle slide*)

Aumentando il numero di azioni del titolo i, la sua correlazione con il portafoglio aumenta, facendo crescere il rendimento richiesto fino a che il rend.atteso = rend.richiesto, a quel punto l'ammontare del titolo i è ottimale. Se il rendimento atteso del titolo i è minore del rendimento richiesto, occorre ridurre la Q detenuta di i così la correlazione e il rend.richiesto scenderanno fino a che rend.atteso = rend.richiesto.
Un portafoglio, quindi, è efficiente solo se il rend.atteso per ogni titolo equivale al suo rend.richiesto, in quanto vuol dire che non può essere migliorato aggiungendo Q di un titolo.

Questa equazione

$$E[R_i] = r_i \ º \ r_f + b_i^{eff} \times (E[R_{eff}] - r_f) \quad (11.21)$$

afferma che si può determinare il premio per il rischio appropriato per un investimento dal suo beta con il portafoglio efficiente.

Capital Asset Pricing Model

Il CAPM permette di individuare il portafoglio efficiente di attività rischiose senza dover conoscere il rendimento atteso di ogni titolo. Utilizza le scelte ottimali effettuate dagli investitori per individuare il portafoglio efficiente come portafoglio di mercato, per ottenere questo risultato facciamo tre ipotesi sul comportamento degli investitori:

1) Gli investitori possono acquistare e vendere tutti i titoli al P di mercato (senza sostenere costi di transazione o pagare imposte) e possono prendere o dare a prestito denaro al tasso di interesse privo di rischio.
2) Gli investitori detengono solamente portafogli efficienti di titoli scambiati, poertafogli che danno il maggiore rendimento atteso per un determinato livello di volatilità
3) Gli investitori hanno aspettative omogenee su volatilità, correlazioni e rendimenti attesi dei titoli.

Ovviamente vi sono molti investitori al mondo e ognuno può avere la propria personale stima della volatilità delle correlazioni e dei rendimenti attesi dei titoli disponibili. Però se gli investitori usano informazioni pubblicamente disponibili le loro stime tendano ad essere simili, e quindi non è irragionevole considerare un caso speciale in cui tutti gli investitori effettuano le stesse stime sui futuri investimenti e futuri rendimenti, come abbiamo fatto nella terza ipotesi del CAPM.

Tutti gli investitori, quindi, hanno le stesse informazioni e con esse fanno le stesse stime, e domandano gli stessi titoli. Il portafoglio efficiente, quindi, è uguale per tutti e non varia per ogni investitore. Quest'unico portafoglio sicuramente è efficiente in quanto ogni investitore vuole detenere solamente portafogli efficienti, il portafoglio efficiente è quello di mercato.

Ne deriva quindi, che se tutti i titoli fossero detenuti da tutti gli investitori, in equilibrio ci dovremmo trovare in uguaglianza di domanda e offerta. Tutti gli investitori, infatti, domandano il portafoglio efficiente e l'offerta di titoli è il portafoglio di mercato quindi i due portafogli devono coincidere. Se qualche titolo non facesse parte del portafoglio efficiente, allora nessun investitore vorrebbe possederlo, e la domanda per questo titolo non sarebbe uguale all' offerta, il prezzo di questo titolo scenderebbe aumentando il suo rendimento atteso fino a diventare un investimento attrattivo. in questa maniera i prezzi di mercato si aggiusterebbero in modo che il portafoglio efficiente e quello di mercato arriverebbero a coincidere e la domanda sarebbe uguale all'offerta. La condizione di domanda uguale offerta non deve essere vera sempre, agli squilibri devono durare poco e nel lungo termine deve essere valida, Se non fosse valida nel lungo periodo gli investitori avranno in portafoglio inefficiente e quindi ci saranno meccanismi che riporteranno alla situazione di equilibrio.

Investimento ottimale: la Capital Market Line (CML)

Quando valgono le ipotesi del CAPM, il portafoglio efficiente e il portafoglio di mercato. quando la tangente passa per il portafoglio di mercato, è detta **capital market line (CML)** o **linea del mercato dei capitali,** è la frontiera efficiente ottenuta da portafogli che a loro volta sono combinazioni tra il portafoglio di mercato e il titolo privo di rischio**.** Tutti gli investitori dovrebbero scegliere un portafoglio sulla CML contenente una certa combinazione del titolo privo di rischio e del portafoglio di mercato. L'equazione della CML, partendo dall'equazione di una retta, è:

$$Y = a + bx \ \text{------>} \quad E(Ri) = rf + \frac{rm-rf}{SD\ mkt}(SDi)$$

È una relazione rischio rendimento, da una stima corretta del rendimento solamente per portafogli ampi e diversificati perché nella formula usiamo SD, e quindi ne deriva che se il rendimento deve remunerare solo il rischio sistematico ed SD però misura il rischio totale, essa misura rischio sistematico solo nel caso in cui il portafoglio sia diversificato. Non ci dà una buona stima del rendimento per singoli titoli, non può essere quindi applicato a tutte le attività rischiose.

Per poter utilizzare l'equazione della CML per singoli titoli devo sostituire la volatilità dal titolo con la sola volatilità che varia seguendo il portafoglio di mercato:

$$E(Ri) = rf + \beta i\ (rm - rf)$$

Questa che abbiamo ottenuto è l'equazione della **Security Market Line (SML),** e si può usare sia per i portafogli che per i singoli titoli, perché il rischio è dato dal beta e non dalla volatilità, perciò considera solo il rischio sistematico. La SML è una retta e rappresenta la relazione lineare tra il beta dell'azione e il suo rendimento atteso. questa retta è rappresentata nella parte B della figura seguente come la retta che passa attraverso l'investimento privo di rischio e il portafoglio di mercato, è inoltre la retta sulla quale tutti i singoli titoli dovrebbero stare quando siano rappresentati in termini di rendimento atteso e beta.

(Figura 11.12 pag.414)

La distanza di ogni azione a destra della CML dipende dal suo rischio diversificabile. La relazione tra rischio e rendimento dei singoli titoli diventa evidente solo quando si misura il rischio di mercato del titolo invece che il rischio totale.

Considerando le ipotesi del CAPM possiamo riscrivere l'equazione di <u>rendimento atteso di un generico titolo</u>:

$$E[R_i] = r_i = r_f + \beta_i \times (E[R_{Mkt}] - r_f)$$

<u>del beta del titolo rispetto al portafoglio di mercato</u>:

$$\beta_i^{Mkt} = \beta_i = \frac{\overbrace{SD(R_i)\times Corr(R_i, R_{Mkt})}^{\text{volatilità di } i \text{ comune con il mercato}}}{SD(R_{Mkt})} = \frac{Cov(R_i, R_{Mkt})}{Var(R_{Mkt})}$$

ed il <u>beta di un portafoglio</u>:

$$\beta_P = \frac{Cov(R_P, R_{Mkt})}{Var(R_{Mkt})} = \frac{Cov(\sum_i x_i R_i, R_{Mkt})}{Var(R_{Mkt})} = \sum_i x_i \frac{Cov(R_i, R_{Mkt})}{Var(R_{Mkt})}$$
$$= \sum_i x_i \beta_i \qquad (11.24)$$

in altre parole il beta di un portafoglio è la media ponderata dei beta dei titoli che lo compongono.