



Introduzione alla teoria dei giochi

La teoria dei giochi è utile in uno scenario di oligopolio.

Stiamo considerando uno scenario con un numero limitato di produttori ed un numero alto di consumatori → ogni impresa deve considerare le azioni dei suoi rivali. Queste interazioni vengono studiate con la teoria dei giochi, teoria che presuppone che le imprese agiscano in maniera razionale (imprese vogliono $\max \pi$ ed hanno funzione di utilità), che tutti i players conoscano le regole del gioco e che le imprese sappiano della razionalità dei propri concorrenti nell'elaborazione di strategie.

La differenze si distinguono in giochi cooperativi e non cooperativi (noi ci focalizzeremo su questi) e giochi simultanei (morra cinese) e sequenziali (scacchi). Per gli ultimi due dopo li vedremo meglio.

La presenza o meno della cooperatività determina la collusione (che è illecita) → le imprese si metterebbero d'accordo, magari nel non farsi la guerra. Una cooperazione in questo senso quindi è chiaro che genererebbe perdita secca maggiore rispetto alla non cooperatività.

Il risultato dipende dall'informazione disponibile. Dobbiamo definire però un concetto di equilibrio → ciascun giocatore sceglie una strategia e la combinazione di queste strategie determina il risultato. Il risultato determina i pay-off (profitti?).

Il concetto di equilibrio racchiude al suo interno quindi tutte le possibili strategie che i giocatori sono effettivamente in grado di giocare. Se le strategie consistono nella scelta di un determinato output di produzione o un livello dei prezzi l'equilibrio sarà un dato livello di Q o di P tale da non provocare altri spostamenti (le due cose non coincidono).

Nash formalizza l'equilibrio: *“Nessuna impresa desidera cambiare la propria strategia attuale dato che nessun'altra impresa cambia la propria strategia attuale”* → in soldoni nessuno cambia la propria strategia e gli altri stanno fermi → è la soluzione di un gioco. Risolvere per un equilibrio è simile al fare una previsione su come verrà giocato il gioco. Nell'equilibrio di Nash la strategia giocata da ogni individuo rappresenta la miglior risposta alle strategie adottate dagli altri. L'equilibrio di Nash è in questo senso self-enforcing → ogni parte non ha incentivo a uscire da tale equilibrio se nemmeno gli altri hanno incentivi.

Possiamo differenziare le diverse strategie:

- 1) **Strategie dominate** = non vengono mai impiegate e possono essere eliminate. Non sono mai attuate perché danno un pay-off minore di quelle alternative (a prescindere dalle strategie degli altri concorrenti).



- 2) **Strategie dominanti** = può essere sempre scelta a prescindere da ciò che fanno gli altri.

Esempio sulle strategie dominate e dominanti

Immaginiamo che ci siano solo due compagnie aeree, la Delta e la American, che simultaneamente debbano decidere l'orario di partenza di un volo Chicago - Milano. Il prezzo è uguale per entrambe e simultaneamente stanno decidendo in che fascia oraria inserirsi. Da una ricerca di mercato è emerso che il 70% dei viaggiatori preferisce partire di notte ed il 30% di mattina. Che punto di equilibrio raggiungeremo ?

In questo caso le due aziende faranno lo stesso ragionamento → se decidono di inserirsi entrambe di sera dovranno spartirsi il mercato → ognuna avrebbe quindi il 35%.

La decisione di inserirsi di sera e di avere il 35% è maggiormente utile rispetto alla decisione di inserirsi di mattina (prendendo il 30%) e lasciando la tratta notturna (con il 70% di mercato) al concorrente.

A prescindere quindi dalla decisione del concorrente la decisione di inserirsi di sera quindi è quella tale da determinare un equilibrio di Nash → si può definire strategia dominante perché a prescindere dalla decisione del concorrente (che si ritiene razionale) risulta essere la scelta migliore. Qualora non si fossero trovate strategie dominanti si sarebbero dovute scartare quelle dominate.

Nella teoria dei giochi vi è interdipendenza del pay-off: il pay-off dell'impresa dipende dal pay-off delle altre → d'altronde la scelta ottimale da parte di un agente dipende dalle azioni degli altri.

Gli elementi di base

Alcune definizioni:

- **Giocatori** = coloro che giocano
- **Regole** = le regole del gioco specificano tre cose:
 - 1) I tempi dei movimenti di tutti i giocatori
 - 2) le azioni disponibili per un giocatore in ciascuna delle sue mosse (se si gioca prima o si gioca insieme)
 - 3) le informazioni che un giocatore ha ad ogni sua mossa (se il gioco è simultaneo potrebbero non esserci informazioni)
- **I risultati** = il risultato di una partita dipende da ciò che ogni giocatore fa quando è il suo turno di muoversi. L'insieme dei risultati è determinato da tutte le possibili combinazioni di azioni intraprese dai giocatori.



Tipologie di giochi

I giochi si classificano sulla base dei tempi delle mosse e sull'incertezza dei profitti rivali:

→ **gioco statico** = un giocatore si muove e lo fa senza conoscere l'azione dei suoi rivali (gioco simultaneo?).

→ **gioco dinamico** = i giocatori si muovono in sequenza e hanno qualche idea, forse imperfetta, di ciò che i rivali hanno fatto. I giocatori almeno parzialmente consapevoli delle azioni intraprese dagli altri fin'ora (gioco sequenziale).

Nei giochi dinamici distinguiamo ulteriormente i giochi con

→ **perfetta informazione** = tutti i giocatori conoscono l'intera storia quando tocca a loro ed i payoff delle altre imprese

→ **informazione incompleta** = i players hanno un'idea parziale della storia del gioco e non conoscono i guadagni degli altri

Distinguiamo quattro tipi di gioco:

- 1) Giochi statici con informazione completa
- 2) Giochi statici con informazione incompleta
- 3) Giochi dinamici con informazione completa
- 4) Giochi dinamici con informazione incompleta

Giochi statici con perfetta informazione

L'informazione completa indica che i giocatori conoscano i payoff dei loro avversari. Statico implica il fatto che i giocatori hanno una sola mossa e quando un giocatore si muove non conosce l'azione intrapresa dai suoi avversari → i giocatori fanno la loro mossa simultaneamente.

La rappresentazione in modo formale

> Ci sarà un gruppo di giocatori $(1, 2, \dots, l)$ dove l è il numero dei giocatori.

> Un set di strategie per ciascun giocatore i . rappresentato da S_i (la lista delle azioni che si possono compiere)

> Una funzione di Payoff (prendiamo il profitto) per ciascun giocatore i , $\pi_i(s)$, che restituisce il payoff del giocatore i per ogni profilo di strategie $s = (s_1, s_2, \dots, s_l)$

Per un set di due giocatori si può usare una matrice di payoff. Per il giocatore 1 il payoff si legge sulle righe, per il giocatore 2 si legge sulle colonne.

		Palyer 2		
		C1	C2	C3
Palyer 1	R1	4, 3	5, 1	6, 4
	R2	2, 1	3, 4	3, 6
	R3	3, 0	4, 6	2, 8

Nel caso sotto, l'insieme delle strategie per il giocatore 1 è $S_1 = (R1, R2, R3)$ e per il giocatore 2 $S_2 = (C1, C2, C3)$.



Ogni combinazione di strategie può essere giocata.

Per esempio se $s = (R_1, C_1)$ allora $\pi_1(s) = \pi_1(R_1, C_1) = 4$ e $\pi_2(s) = \pi_2(R_1, C_1) = 3$.
 Bisogna notare che il payoff C3 per il player 2 supera quello di C1 e C2 indipendentemente dalla strategia adottata dal giocatore 1. Allo stesso modo il guadagno per il giocatore 1 viene massimizzato scegliendo la strategia R1.
 In questo caso quindi l'equilibrio di Nash sarà la combinazione $s = (R_1, C_3)$.

Esempio della spia sulle slide (esso è uguale al dilemma dei coniugi in fondo)

Non sempre è ovvio quale strategia verrà scelta; piuttosto conviene pensare a quali strategie non conviene giocare → evitare a priori le strategie dominate potrebbe essere un modo semplice di approcciare il gioco.

L'equilibrio di Nash porta due difficoltà pratiche:

- 1) possono esserci più equilibri di Nash
- 2) Potrebbe non esserci alcun equilibrio

Esempio del dilemma dei sessi - Più equilibri di Nash

	Hockey Game	Ballet
Hockey Game	3, 1	0, 0
Ballet	0, 0	1, 3

In questo esempio un uomo (sulle righe) e una donna (sulle colonne) esprimono preferenze diverse su cosa fare la sera; lei vuole andare al balletto, lui alla partita di Hockey. In ogni caso

preferirebbero partecipare insieme. Il problema sorge quando in questo caso ci sono due profili di strategia di equilibrio di Nash. Nel gioco dove ci sono più equilibri di Nash nessuno di essi si distingue come previsione vincente.

Può accadere tuttavia che anche in una situazione con più equilibri di Nash uno di questi sia più "giusto" rispetto agli altri → Ci possono essere dei punti focali che in caso di equilibri multipli siano in grado di coordinare le scelte e le aspettative dei giocatori

Questo può essere dovuto ad altri fattori come norme sociali, culturali o storiche.

Esempio su testa e croce - Nessun equilibrio di Nash



	Heads	Tails
Heads	1, -1	-1, 1
Tails	-1, 1	1, -1

Figure 7.9 Matching Pennies

Nel caso di un gioco come testa o croce è chiaro che non sia possibile definire la strategia migliore. Se uno vince l'altro perde e viceversa → è un gioco a somma zero (o definito *strettamente competitivo*).

In questo caso il guadagno per un giocatore corrisponde esattamente alla perdita dell'altro → a differenza del *dilemma dei sessi* non esiste un interesse comune (ossia stare la serata insieme) bensì solo interessi privati.

Cooperazione nei giochi ripetuti

Un gioco ripetuto è costituito dal fatto di giocare un gioco semplice più volte, in successione → *i giochi ripetuti consentono ai players di punirsi e ricompensarsi tra di loro a seconda delle scelte passate.*

La cooperazione può essere sostenuta attraverso la minaccia di punizioni (in caso di comportamento contrario agli accordi) o attraverso remunerazioni; in entrambi i casi sistemi di incentivi e disincentivi devono essere credibili.

Se il gioco ripetuto non ha un punto di arresto fisso allora la cooperazione diventa possibile → un metodo per incentivare alla cooperazione è l'utilizzo di *grim strategies (strategie inflessibili)* ossia minacce di punizioni permanenti; tale strategia se credibile porta a sostenere la cooperazione.

Se il gioco ha invece un numero finito di volte il solo equilibrio di Nash è lo stesso del gioco ad uno stadio.

Esempio del dilemma dei coniugi - Cooperazione a giochi ripetuti

		Margherita	
		Pulire	Oziare
Omero	Pulire	2, 2	0, 3
	Oziare	3, 0	1, 1

Margherita e Omero devono scegliere simultaneamente se pulire casa o oziare. Se uno pulisce all'altro conviene oziare. Se uno ozia l'altro preferisce oziare.

L'equilibrio è raggiunto quando entrambi oziano; noi sappiamo tuttavia che entrambi starebbero meglio se pulissero insieme casa eppure questa ipotesi è poco stabile → ognuno ha l'incentivo ad oziare sapendo che l'altro pulisce.

Così come nel dilemma del prigioniero con la ripetizione ad uno stadio entrambi preferirebbero pulire. Se invece vi fosse cooperazione (collegata ad un sistema di remunerazioni o punizioni permanenti) e il gioco non si arrestasse, allora è possibile arrivare al punto in cui entrambi puliscono.

Una punizione permanente il potrebbe essere la promessa di non pulire più casa → se Omero deviasse dal patto di pulirla insieme, un giorno guadagna 3, ma dal giorno seguente guadagnerà 1.

L'esempio del prigioniero ha la stessa struttura del dilemma dei coniugi

Teoria dei Giochi parte 2

Forma estensiva

I giochi dinamici si verificano in più stadi, sono definiti dalla loro forma estesa (ed hanno forma di diagramma ad albero).

Si sa l'identità ed il numero di giocatori, quando ognuno può muovere e le relative scelte di azione. Ad ogni mossa il giocatore viene informato - forse solo parzialmente - della storia del gioco.

I risultati del gioco sono determinati dalle mosse di tutti i giocatori.

La struttura ad albero ha:

- > dei nodi decisionali = indicano il turno di un giocatore a muoversi
- > rami dell'albero = ogni ramo corrisponde ad una azione disponibile per un giocatore su quel ruolo
- > i nodi terminali sono i cerchi solidi. Questi indicano quando il gioco è finito

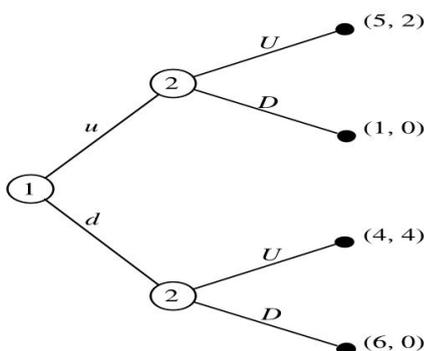


Figure 9.1 Dynamic Game I

Ecco la rappresentazione del gioco dinamico con la struttura ad albero.

Sappiamo che in questo gioco, il prigioniero 2 non conosce la scelta del prigioniero 1 quando decide se fare la spia o negare. Questa conoscenza imperfetta della storia del gioco è mostrata dalla linea tratteggiata che collega i due nodi decisionali del prigioniero 2

Il dilemma del prigioniero è un esempio di giochi con informazione imperfetta

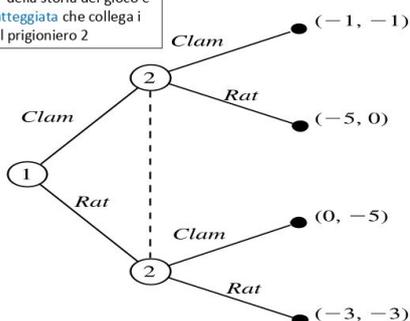


Figure 9.2 Extensive Form of the Prisoners' Dilemma

Dilemma del prigioniero in forma estesa.

La linea tratteggiata identifica la conoscenza imperfetta del gioco → in



questo caso i prigionieri hanno informazioni soltanto legate ai loro nodi decisionali.

In questo bisogna distinguere tra azione e strategia: le azioni sono le scelte disponibili per un giocatore quando è il suo turno di muoversi. La strategia specifica l'azione che un giocatore eseguirà in ciascuno dei nodi decisionali. Una strategia non è contingente se si fanno sempre le stesse scelte a prescindere da quello che fa l'altro.

	(U, U)	(U, D)	(D, U)	(D, D)	
u	5, 2	5, 2	1, 0	1, 0	I giochi dinamici poi si possono scrivere anche in forma normale
d	4, 4	6, 0	4, 4	6, 0	

Figure 9.3 Normal Form of Dynamic Game I

Gli equilibri multipli sono sempre preoccupanti; i teorici della teoria dei giochi affermano che il concetto di equilibrio di Nash è troppo debole poiché consente a minacce non incredibili di influire sul comportamento. L'equilibrio perfetto nei sottogiochi è un concetto di equilibrio più forte che non consente alle minacce non incredibili di influenzare il comportamento.

La perfezione nei sottogiochi è introdotta da Selten

Equilibrio di Nash nei sottogiochi

Un sottogioco è un gioco più piccolo "incorporato" nel gioco completo.

A partire da un certo punto del gioco, un sottogioco include tutte le successive scelte che devono essere fatte se i giocatori hanno effettivamente raggiunto quel punto nel gioco. Un sottogioco quindi deve iniziare con un set di informazioni che è un nodo singolo (il nodo iniziale), includere tutti i nodi decisionali e i nodi terminali che seguono il nodo iniziale e non includere nodi di decisione o nodi terminali che non seguono dal nodo decisionale iniziale. Quando il set di informazioni è di un giocatore è costituito da un singolo nodo decisionale il set di informazioni viene chiamato *singleton*.

Subgame perfect Nash equilibrium

Equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi: un profilo di strategia è un equilibrio di Nash perfetto per sottogioco se le strategie sono un equilibrio di Nash in ogni sottogioco.

Dato che il gioco stesso è un sottogioco ciò significa che l'equilibrio di Nash perfetto nel sottogioco è anche un equilibrio di Nash, ma la perfezione dei sottogiochi richiede anche che il comportamento implicito dalle strategie di equilibrio fuori dal percorso di equilibrio sia anch'esso ottimizzante.



Un equilibrio perfetto nei sottogiochi può dunque essere definito come un insieme di strategie, una per ogni giocatore, in cui le azioni prescritte da queste strategie costituiscono un equilibrio di Nash in ciascun sottogioco che possa essere raggiunto. In sostanza perfezione nei sottogiochi significa che se una strategia è ottimale sarà tale per ogni nodo del gioco.

Saltato una parte sui sottogiochi antipatica da capire